ПРОГРЕССИИ

○ Заблуждается тот, кто полагает, что в Древнем Египте существовала сугубо «практическая» математика, обслуживавшая исключительно бытовые расчеты. Если бы это действительно было так, то из-под пера древнеегипетского писца Ахмеса в начале второго тысячелетия до нашей эры не появилась бы задача, привлекшая потомков отвлеченной игрой ума:

«У 7 лиц есть 7 кошек, каждая кошка съедает по 7 мышей, каждая мышь съедает по 7 колосьев ячменя, из каждого колоса может вырасти 7 мер зерна. Каков ряд чисел, возникающих из этой задачи, как велика сумма его членов?»

Впоследствии эта задача перекочевала в фольклор многих народов. Например, в российском варианте она звучала так:

«Шли семь старцев, у каждого старца по семи костылей, на всяком костыле по семи сучков, на каждом сучке по семи кошелей, в каждом кошеле по семи пирогов, а в каждом пироге по семи воробьев. Сколько всего?»

По существу, в этой задаче речь идет о нахождении суммы членов конечной геометрической прогрессии со знаменателем 7.

Арифметическая и геометрическая прогрессии были объектом внимания не только в Древнем Египте, но и в других очагах древней культуры. Например, в одной из древневавилонских клинописных табличек содержится задача о дележе наследства между десятью братьями в соответствии с арифметической прогрессией:

«Есть 10 братьев и $1\frac{2}{3}$ мины серебра. Брат выше брата (в отношении его доли). На сколько он выше, я не знаю. Доля восьмого 6 шекелей. Брат над братом, на сколько он выше?»

(Для желающих попробовать свои силы в решении этой задачи сообщим, что 1 мина – единица веса, равная 60 шекелям.)

Дж.Кардано (1501–1576)

○ Средневековый алгебраист Джироламо Кардано наряду с арифметической и геометрической прогрессиями, которые он называл «равновозрастающими», рассматривал также «конформно возрастающие» прогрессии. Так он называл последовательности, у которых для арифметической прогрессии разность, а для геометрической – знаменатель имеют два чередующихся значения.

Арифметическая прогрессия a, $a + d$, $a + 2d$, $a + 3d$, … обобщалась им на прогрессию a, $a + d$, $a + r$, $a + 2d + r$, $a + 2d + 2r$, $a + 3d + 2r$, $a + 3d + 3r$, …, а геометрическая прогрессия a, aq, aq^2, aq^3, … – на прогрессию a, aq, aqp, aq^2p, aq^2p^2, aq^3p^2, aq^3p^3, … Кроме этих последовательностей, Кардано рассматривал «равномерно-возрастающие» прогрессии. В этих прогрессиях разности или знаменатели возрастают как арифметическая прогрессия, вследствие чего арифметическая прогрессия обобщается на прогрессию a, $a + d$, $a + d + 2d$, $a + d + 2d + 3d$, … а геометрическая прогрессия – на прогрессию a, aq, $aq(q+1)$, $aq(q+1)(q+2)$, … В качестве полезного упражнения рекомендуем найти выражение общего члена в последовательностях Кардано.

○ В следующей практической задаче возникает еще один любопытный вид обобщения – арифметико-геометрическая прогрессия. Эту прогрессию можно описать рекуррентной зависимостью

$$x_{n+1} = ax_n + b,$$

где a и b – ненулевые константы, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Предположим, в некоторой технологической цепочке производства товаров $(n+1)$-й производитель покупает промежуточный товар у n-го производителя, обрабатывает (или дорабатывает) его и, естественно, свой продукт продает дороже следующему участнику процесса. При этом отпускная цена товара x_n у n-го производителя умножается на коэффициент $a > 1$, учитывающий налог с продаж. Стоимость отпускного товара x_{n+1} у $(n+1)$-го производителя увеличивается по сравнению с понесенными им затратами на величину b. Для простоты полагая величину b постоянной для всех производителей, приходим к рекуррентной схеме роста цены товара по мере продвижения его по технологической цепочке. Выражение общего члена этой последовательности имеет вид $x_n = a^n x_0 + b\frac{a^n - 1}{a - 1}$. Таким образом, окончательная стоимость товара довольно сильно – полиномиально – зависит от величины налога с продаж (коэффициента a). Кроме того, она существенно зависит от цены x_0, которую назначает первый производитель технологической цепочки. Отсюда понятно, почему незначительное увеличение цены на базовый товар (например, топливо) приводит к резкому скачку цен на все другие продукты производства.

○ Среди первых членов арифметической прогрессии 7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, … встречается сравнительно много простых чисел. Будут ли простые числа в этой прогрессии образовывать бесконечное множество или же, начиная с некоторого места, от них не останется и следа? Оказывается, не только в этой, но и в любой другой арифметической прогрессии, у которой первый член и ее

Л.Дирихле (1805–1859)

разность взаимно просты, простые числа будут встречаться в неограниченном количестве. Это впервые доказал Петер Густав Лежён Дирихле в 1837 году, привлекая аппарат высшей математики. В 1949 году А. Сельберг опубликовал элементарное (но не простое!) доказательство теоремы Дирихле.

В некоторых частных случаях элементарное доказательство найти сравнительно несложно. Например, докажем, что в арифметической прогрессии с первым членом 3 и разностью 4 встречается бесконечно много простых чисел, или, другими словами, простых чисел вида $4t + 3$ бесконечно много. Предположим, что существует только конечное множество простых чисел вида $4t + 3$, и рассмотрим число N, равное их произведению. Поскольку число $4N + 3$ нечетное, то все его простые делители имеют вид $4n + 3$ или $4n + 1$. Число $4N + 3$ не может иметь в качестве делителей только числа вида $4n + 1$, ведь произведение чисел вида $4n + 1$ само имеет такой же вид. Пусть D – некоторый простой делитель числа $4N + 3$, имеющий вид $4n + 3$. Поскольку число $4N + 3$ не делится ни на одно из простых чисел вида $4t + 3$ (мы предположили, что таких простых чисел конечное количество, а их произведение равно числу N), то обнаруженный нами новый простой делитель D должен быть больше, чем все простые числа вида $4t + 3$, рассмотренные ранее. Противоречие, поскольку никаких новых простых делителей, по нашему предположению, быть не может.

○ Предположим, множество всех натуральных чисел каким угодно образом разбито на части (например, на числа четные и нечетные, простые и составные и т.п.). Можно ли утверждать, что по крайней мере в одной из этих частей найдутся арифметические прогрессии со сколь угодно большим количеством членов? Несмотря на простоту вопроса и очевидность ответа, задача эта оказалась не такой уж простой. Известный ученый и педагог Александр Яковлевич Хинчин (1894–1959) назвал ее одной из «жемчужин теории чисел». В конце двадцатых годов прошлого столетия ее решил голландский математик Ван дер Варден, доказав следующую теорему. Пусть k и l – произвольные натуральные числа. Тогда существует такое натуральное число n (зависящее от k и l), что при разбиении любого отрезка натуральных чисел длины n любым способом на k классов (среди которых могут быть и пустые) по крайней мере в одном из этих классов найдется арифметическая прогрессия длины l.

Знаете ли вы, что...

- Существуют арифметические прогрессии произвольной длины, составленные из различных попарно взаимно простых чисел.
- В каждой возрастающей арифметической последовательности, членами которой являются натуральные числа, существует отрезок произвольной длины, состоящий только из составных чисел.
- Существует арифметическая прогрессия из натуральных чисел, содержащая бесконечно много членов, являющихся точными квадратами.
- Не существует четырех последовательных натуральных чисел, каждое из которых было бы степенью натурального числа с натуральным показателем, большим 1.
- Не существует четырех различных квадратов натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию (П.Ферма).

П.Ферма (1601–1665)

- Существует бесконечно много троек натуральных чисел x, y и z, для которых числа $x(x+1)$, $y(y+1)$, $z(z+1)$ составляют возрастающую арифметическую прогрессию.
- Если стороны прямоугольного треугольника выражаются натуральными числами a, b, c, образующими арифметическую прогрессию, то $a : b : c = 3 : 4 : 5$.
- Не существует возрастающих арифметических прогрессий, состоящих из четырех членов последовательности Фибоначчи (определяемой условиями $u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ для $n = 1, 2, \ldots$), однако существуют возрастающие арифметические прогрессии, состоящие из трех членов последовательности Фибоначчи.
- Прогрессия $11k + 4$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) не содержит ни одного числа последовательности Фибоначчи.
- Существует бесконечно много арифметических прогрессий, образованных из трех разных простых чисел.
- Известно много прогрессий, образованных из трех различных простых чисел, первыми членами которых является число 3, например: 3, 7, 11; 3, 11, 19; 3, 17, 31; 3, 23, 43; 3, 31, 59; 3, 37, 71; 3, 41, 79; 3, 43, 83, однако неизвестно, существует ли их бесконечно много.
- Существует только одна арифметическая прогрессия с разностью 10, составленная из трех простых чисел, а именно прогрессия 3, 13, 23.
- Неизвестно, существует ли бесконечно много арифметических прогрессий, образованных из трех простых чисел, первым членом которых является любое простое нечетное число.
- Если n членов арифметической прогрессии являются простыми нечетными числами, то разность прогрессии делится на каждое простое число, меньшее n (В.Тебольт). Последовательность 199, 409, 619, 829, 1039, 1249, 1459, 1669, 1879, 2089 является арифметической прогрессией, состоящей из десяти возможно наименьших простых чисел.
- Существует аналогичная прогрессия из 13 простых чисел: 4943, 65003, 125063, 185123, 245183, 305243, 365303, 425363, 485423, 545483, 605543, 665603, 725663.
- Неизвестно, существует ли арифметическая прогрессия, состоящая из n простых чисел, где n – произвольное число.
- Ни один член прогрессии $30k + 7$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) не является ни суммой, ни разностью двух простых чисел.

Материал подготовил А.Жуков